Практическая работа №1

Задание №1

Найти указанные пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+4x^4-3x^2+3}{7x^4+2x^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+8x^2}-3}{x^2-x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{7x}\right)^{4x}$$

Решение:

1) Выполним непосредственную подстановку:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+4x^4-3x^2+3}{7x^4+2x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Получили неопределенность. Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3+4x^4-3x^2+3}{7x^4+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6}{x}+4-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{x^4}}{7+\frac{2}{x^2}}=\left|\begin{matrix}\text{При } x\to\infty:\\ \frac{6}{x},\frac{3}{x^2},\frac{3}{x^4},\frac{2}{x^2}\to 0\end{matrix}\right|=\frac{4}{7}$$

2) Выполним непосредственную подстановку:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+8x^2}-3}{x^2-x}=\frac{\sqrt{9}-3}{1-1}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Получили неопределенность. Умножим числитель и знаменатель на $\left(\sqrt{1+8x^2}+3\right)$. Разложим знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+8x^2}-3}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{1+8x^2}-3\right)\left(\sqrt{1+8x^2}+3\right)}{x(x-1)\left(\sqrt{1+8x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1+8x^2-9}{x(x-1)\left(\sqrt{1+8x^2}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{8(x^2-1)}{x(x-1)\left(\sqrt{1+8x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{8(x+1)(x-1)}{x(x-1)\left(\sqrt{1+8x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{8(x+1)}{x\left(\sqrt{1+8x^2}+3\right)}=$$

$$=\frac{8\cdot(1+1)}{1\cdot(\sqrt{9}+3)}=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

3) Выполним непосредственную подстановку:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{7x}\right)^{4x} = [1^{\infty}]$$

Получили неопределенность. Используем свойство второго замечательного предела:

$$\lim_{\alpha(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha(x)}\right)^{\alpha(x)} = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{7x}\right)^{4x} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{7x}\right)^{7x}\right)^{\frac{4}{7}} = e^{\frac{4}{7}}$$

Задание №2

Найти производные первого порядка данных функций:

$$y = \frac{6}{5x^3+2x^2-1}$$

$$y = \cos(3x - \sin x)$$

$$y = \frac{3x-16x^6}{\sqrt{x-7}}$$

Решение:

1) Используем правило производной сложной функции, а также, значения табличных производных:

$$y' = \left(\frac{6}{5x^3+2x^2-1}\right)' = \left(6\cdot(5x^3+2x^2-1)^{-1}\right)' =$$

$$= -6\cdot(5x^3+2x^2-1)^{-2}\cdot(5x^3+2x^2-1)' = -\frac{6\cdot(15x^2+4x)}{(5x^3+2x^2-1)^2}$$

2) Используем правило производной сложной функции, а также, значения табличных производных:

$$y' = (\cos(3x-\sin x))' = -\sin(3x-\sin x)\cdot(3x-\sin x)' =$$

$$= -(3-\cos x)\cdot\sin(3x-\sin x) = (\cos x - 1)\cdot\sin(3x-\sin x)$$

3) Используем правило производной частного, сложной функции, а также, значения табличных производных:

$$y' = \left(\frac{3x-16x^6}{\sqrt{x-7}}\right)' = \frac{(3x-16x^6)'\cdot\sqrt{x-7} - \left(\sqrt{x-7}\right)'\cdot(3x-16x^6)}{x-7} =$$

$$= \frac{(3-96x^5)\cdot\sqrt{x-7} - \dfrac{3x-16x^6}{2\sqrt{x-7}}}{x-7} = \frac{2(x-7)(3-96x^5)-3x+16x^6}{2(x-7)\sqrt{x-7}} =$$

$$= \frac{6x-42-192x^6+1344x^5-3x+16x^6}{2(x-7)\sqrt{x-7}} = \frac{-176x^6+1344x^5+3x-42}{2(x-7)\sqrt{x-7}}$$

Задание №3

Вычислить следующие неопределенные интегралы:

$$\int (7x^9+4x^5-7x^3+x-5)dx$$

$$\int \frac{3dx}{x^2+4}$$

$$\int \cos(3x+5)\,dx$$

Решение:

1) Используем свойства вычисления интегралов, значения табличных интегралов:

$$\int (7x^9+4x^5-7x^3+x-5)dx = 7\int x^9dx + 4\int x^5dx - 7\int x^3dx + \int xdx - 5\int dx =$$

$$= \frac{7}{10}x^{10} + \frac{2}{3}x^6 - \frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + C$$

2) Преобразуем подынтегральное выражение:

$$\int \frac{3dx}{x^2+4} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} =$$

Выполним замену переменной:

$$\frac{x}{2} = t \qquad \frac{dx}{2} = dt \qquad dx = 2dt$$

$$= \frac{3}{4}\int \frac{2dt}{t^2+1} = \frac{3}{2} arctg\ t + C = \frac{3}{2} arctg\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

3) Выполним замену переменных:

$$3x + 5 = t \qquad 3dx = dt \qquad dx = \frac{1}{3}dt$$

$$\int \cos(3x+5)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+5) + C$$

Практическая работа №2

Задание №1

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса и методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -4 \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

Решение:

1) Метод Гаусса:

Приведем данную систему к диагональному виду. Для этого используем преобразования расширенной матрицы данной системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |-1 \\ 3 & 2 & -2 & |-4 \\ 5 & 3 & 4 & |-2 \end{pmatrix}$$ Умножим первую строку на (-3) и сложим со второй, умножим первую строку на (-5) и сложим с третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |-1 \\ 0 & -1 & -8 & |-1 \\ 0 & -2 & -6 & |3 \end{pmatrix}$$ Умножим вторую строку на (-1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |-1 \\ 0 & 1 & 8 & |1 \\ 0 & -2 & -6 & |3 \end{pmatrix}$$ Умножим вторую строку на 2 и сложим с третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |-1 \\ 0 & 1 & 8 & |1 \\ 0 & 0 & 10 & |5 \end{pmatrix}$$ Разделим третью строку на 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |-1 \\ 0 & 1 & 8 & |1 \\ 0 & 0 & 1 & |0{,}5 \end{pmatrix}$$ Умножим третью строку на (-8) и сложим со второй, умножим третью строку на (-2) и сложим с первой

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & |-2 \\ 0 & 1 & 0 & |-3 \\ 0 & 0 & 1 & |0{,}5 \end{pmatrix}$$ Умножим третью строку на (-1) и сложим с первой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & |1 \\ 0 & 1 & 0 & |-3 \\ 0 & 0 & 1 & |0{,}5 \end{pmatrix}$$

Восстановим систему по полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 0{,}5 \end{cases}$$

2) Методом Крамера

Составим и вычислим определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 10 + 18 - 20 - 12 + 6 = -10$$

Аналогично вычисляем определители Δ_i, полученные из Δ, заменой i-го столбца столбцом свободных коэффициентов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 + 4 - 24 + 8 + 16 - 6 = -10$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & -2 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -16 + 10 - 12 + 40 + 12 - 4 = 30$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 20 - 9 + 10 + 6 + 12 = -5$$

Тогда решение системы найдем по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-10}{-10} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{30}{-10} = -3; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-10} = 0{,}5$$

Выполним проверку найденного решения. Подставим найденные значения в исходную систему:

$$\begin{cases} 1 - 3 + 2 \cdot 0{,}5 = -1 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) - 2 \cdot 0{,}5 = -4 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 0{,}5 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 = -1 \\ -4 = -4 \\ -2 = -2 \end{cases}$$

Решение найдено верно.

Задание №2

Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Приведем данную систему к ступенчатому виду. Для этого используем преобразования расширенной матрицы данной системы.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & |6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & |8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & |4 \end{pmatrix}$ Умножим первую строку на (-2) и сложим со второй, умножим первую строку на (-3) и сложим с третьей

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & |6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & |-4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & |-14 \end{pmatrix}$ Разделим вторую строку на (-5)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & |6 \\ 0 & 1 & 1{,}6 & -0{,}2 & |0{,}8 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & |-14 \end{pmatrix}$ Умножим вторую строку на 4 и сложим с третьей

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & |6 \\ 0 & 1 & 1{,}6 & -0{,}2 & |0{,}8 \\ 0 & 0 & -3{,}6 & 7{,}2 & |-10{,}8 \end{pmatrix}$ Разделим третью строку на (-3,6)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & |6 \\ 0 & 1 & 1{,}6 & -0{,}2 & |0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & |3 \end{pmatrix}$$

Ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и меньше числа переменных, поэтому система совместна и имеет бесконечно много решений.

Выполним обратный ход метода Гаусса:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & |6 \\ 0 & 1 & 1{,}6 & -0{,}2 & |0{,}8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & |3 \end{pmatrix}$ Умножим третью строку на (-1,6) и сложим со второй, умножим третью строку на (-3) и сложим с первой

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & |-3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & |-4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & |3 \end{pmatrix}$ Умножим вторую строку на (-2) и сложим с первой строкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & |5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & |-4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & |3 \end{pmatrix}$$

Восстановим систему по полученной матрице и получим общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 = 5 \\ x_2 + 3x_4 = -4 \\ x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_4 + 5 \\ x_2 = -3x_4 - 4 \\ x_3 = 2x_4 + 3 \end{cases}$$

Практическая работа №3

Задание №1.1

В домашней библиотеке у Василия Петровича собрано 34 книги по научной фантастике. Он хочет взять с собой в отпуск 2 книги для чтения. Сколькими способами Василий Петрович может это сделать?

Решение:

Так как порядок выбора книг не важен, а важен только состав выбранных книг, то число способов, которыми Василий Петрович может выбрать 2 книги из 34 равно числу сочетаний:

$$n = C_{34}^{2} = \frac{34!}{2! \cdot (34-2)!} = \frac{32! \cdot 33 \cdot 34}{2! \cdot 32!} = \frac{33 \cdot 34}{1 \cdot 2} = 561$$

Задание №1.2

В кино отправились 5 друзей. Сколькими способами они могут встать в очередь в кассе?

Решение:

Так как каждая очередь отличается только порядком друзей в очереди, а состав остается неизменным, то число способов, которыми 5 друзей могут расположиться в очереди равно числу перестановок из пяти человек:

$$n = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Задание №1.3

Таблица, размером 99*99 раскрашена в шахматном порядке в белый и черный цвета. Верхняя левая клетка – белая. Сколькими способами можно указать в таблице два квадрата – белый и черный?

Решение:

Так как квадраты чередуются, то число белых квадратов в верхней строке равно 50, а черных 49. Такого вида строк 50.

В второй строке 50 черных квадратов и 49 белых квадратов. Такого вида строк 49.

Поэтому число способов выбора белого квадрата равно:

$n_1 = 50 \cdot 50 + 49 \cdot 49 = 2500 + 2401 = 4901$

Число способов выбора черного квадрата равно:

$n_2 = 50 \cdot 49 + 50 \cdot 49 = 2450 + 2450 = 4900$

По правилу умножения в комбинаторике, число способов выбрать два квадрата – белый и черный, равно:

$n = n_1 \cdot n_2 = 4901 \cdot 4900 = 24014900$

Задание №2.1

При игре в кости бросаются два игральных кубика и подсчитывается сумма выпавших очков. Найти вероятность событий: A – сумма равна 4, B - сумма больше 7.

Решение:

Испытание состоит в броске двух костей. Так как на каждом кубике шесть различных граней, то число элементарных исходов испытания равно:

$n = 6 \cdot 6 = 36$

Запишем все элементарные исходы испытания, для того, чтобы выделить благоприятные для событий A и B

1 кость	2 кость	Сумма	A	B	1 кость	2 кость	Сумма	A	B
1	1	2			4	1	5		
1	2	3			4	2	6		
1	3	4	+		4	3	7		
1	4	5			4	4	8		+
1	5	6			4	5	9		+

1	6	7			4	6	10		+
2	1	3			5	1	6		
2	2	4	+		5	2	7		
2	3	5			5	3	8		+
2	4	6			5	4	9		+
2	5	7			5	5	10		+
2	6	8		+	5	6	11		+
3	1	4	+		6	1	7		
3	2	5			6	2	8		+
3	3	6			6	3	9		+
3	4	7			6	4	10		+
3	5	8		+	6	5	11		+
3	6	9		+	6	6	12		+

Число исходов испытания, благоприятных для события A равно:

$m = 3$

По классическому определению вероятностей:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Число исходов испытания, благоприятных для события B равно:

$m = 15$

По классическому определению вероятностей:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

Задание №2.2

Их имеющихся 20 телевизоров 14 готовы к продаже, а 6 требуют дополнительной регулировки. Найти вероятности событий: A – из случайно отобранных 4 телевизоров все хорошие, B - три хорошие и один нет, C – один хороший и три нет, D – хороших нет.

Решение:

Испытание состоит в выборе 4 телевизоров из 20. Так как порядок выбора телевизоров не важен, а важен только состав извлеченных телевизоров, то число элементарных исходов испытания равно числу сочетаний:

$$n = C_{20}^{4} = \frac{20!}{4! \cdot (20-4)!} = \frac{16! \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 16!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845$$

Событие A состоится, если среди 4 телевизоров будет 4 хороших, которые можно выбрать из 14. Поэтому число исходов испытания, благоприятных для события A равно:

$$m = C_{14}^{4} = \frac{14!}{4! \cdot (14-4)!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1001$$

По классическому определению вероятностей:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1001}{4845} \approx 0{,}207$$

Событие B состоится, если среди 4 телевизоров будет 3 хороших, которые можно выбрать из 14 и 1 требующий проверки, который можно выбрать из 6. По правилу умножения в комбинаторике, число исходов испытания, благоприятных для события B равно:

$$m = C_{14}^{3} \cdot C_{6}^{1} = \frac{14!}{3! \cdot 11!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 364 \cdot 6 = 2184$$

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2184}{4845} \approx 0{,}451$$

Событие C состоится, если среди 4 телевизоров будет 1 хороший, которые можно выбрать из 14 и 3 требующих проверки, которые можно выбрать из 6. По правилу умножения в комбинаторике, число исходов испытания, благоприятных для события C равно:

$$m = C_{14}^{1} \cdot C_{6}^{3} = \frac{14!}{1! \cdot 13!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 14 \cdot 20 = 280$$

$$P(C) = \frac{m}{n} = \frac{280}{4845} \approx 0{,}058$$

Событие D состоится, если среди 4 телевизоров будет 4 требующих проверки, которые можно выбрать из 6. Поэтому число исходов испытания, благоприятных для события D равно:

$$m = C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 1 \cdot 2} = 15$$

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{15}{4845} \approx 0{,}003$$

Задание №2.3

Туристическая группа состоит из 11 юношей и 5 девушек. По жребию (случайным образом) выбирают 3 дежурных. Найти вероятность того, что будут выбраны 2 девушки и 1 юноша.

Решение:

Испытание состоит в выборе 3 дежурных из 16 человек. Так как порядок выбора дежурных не важен, а важен только состав выбранных людей, то число элементарных исходов испытания равно числу сочетаний:

$$n = C_{16}^3 = \frac{16!}{3! \cdot (16-3)!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 560$$

Событие A состоится, если среди 3 выбранных людей будет 2 девушки, которых можно выбрать из 5 и 1 юноша, которого можно выбрать из 11. По правилу умножения в комбинаторике, число исходов испытания, благоприятных для события A равно:

$$m = C_5^2 \cdot C_{11}^1 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{11!}{1! \cdot 10!} = 10 \cdot 11 = 110$$

По классическому определению вероятностей:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{110}{560} \approx 0{,}196$$